Two-dimensional distribution of zeros of the partition function in in the complex field plane

鈴 木 増 雄（東大物性研）

§1　Introduction

状態和の零点分布を複素温度平面で考えた場合[1]と全く同様に，complex field plane でも，二次元的な零点分布を考えることが出来る。強磁性体の場合には，一般に，零点は fugacity plane の単位円周上にあって，[2〜5] 一次元分布をしているようであるから，ここでは，強誘電体のモデルを念頭に置いて，議論することにする。

今，electric (or magnetic) field を E（一つの成分のみに着目する），dipole moment (or Bohr magreton) を d として，

パラメータ

$$\omega = e^{2Ed/kT} \qquad (1)$$

を用いると，多くの場合，状態和は，その零点 $\{\omega_k\}$ によって，

$$\Xi_N(\omega, Z) = \Xi_N(0, Z) \prod_k (1-\omega/\omega_k) \qquad (2)$$

と表わされる。但し，ここに，Z は，温度を表わす適当なパラメータである（Z＝Z（T））。従って，自由エネルギーは，

$$F(\omega, Z) = -KT \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \Xi_N(\omega, Z)$$

$$= F(0, z) - kT \iint \log\left(1-\frac{w}{u+iv}\right) g_E(u, v)\, du\, dv \qquad (3)$$

となる。$g_E(u, v)$ は，w−plane での零点分布関数を表わす。これは，明らかに，次の性質を充たす：

$$g_E(u, -v) = g_E(u, v) \qquad (4)$$

依って，

$$F(w,\ z)-F(0,\ z)=-\frac{kT}{2}\iint \log\left[\frac{(w-u)^2+v^2}{u^2+v^2}\right] g_E(u,\ v)\,du\,dv \quad (5)$$

と書ける。

polarizability や比熱の異常性を議論するには，正の実軸近傍の零点分布の様子だけかわかればよい。以下では，計算を容易にするために，中心対称な分布を扱うことにする。これは，正の実軸近傍で，二次元的分布をしている場合の典型的な例になる。ＫＤＰモデルでは，katsuraの有限格子の数値計算によると，この傾向を示している。そこで，

$$g_E(u,v)=g_E(\gamma) \quad (6)$$

とおくと，自由エネルギーは，

$$F(w,z)-F(0,\ z)=-\frac{kT}{2}\iint \log\left[\frac{w^2+\gamma^2-2w\gamma\cos\varphi}{\gamma^2}\right] g_E(\gamma)\,\gamma\,d\gamma\,d\varphi \quad (7)$$

となる。polarizationは，

$$P=-\frac{\partial F}{\partial E}=4\pi d \quad g_E(\gamma)\ \gamma\,d\gamma-d \quad (8)$$

によって与えられる。故に，polarizability は，

$$\chi=\frac{dp}{dE}=\frac{d^2}{kT}\cdot 2\pi\omega(E)\ g_E(w,\ z) \quad (9)$$

となり，零点分布関数そのものものによって表わされ，分布関数の発散か，そのまま，polarizability の発散となって現われる。これらは，複素温度平面での比熱の異常性の議論と全く同様な事情になる。

§ 2　An Enample of the modified KDP model in the presence of electric field

Wu は，Slater のKDP model に，一つ制限をつけ加え，(1, 1)方向の分極は禁止されるという条件の下に，電場 **E**＝（E，0）の存在する時は，

自由エネルギーが，次式で与えられることを厳密に示した（モデルの詳細については，原著論文[6]，並びに，物性研究Vol. 9 No. 2. B8 参照。もっと一般のEについても解いている）；

$$\log \Xi = \frac{N}{8\pi^2} \int d\theta \int d\varphi \ \log f(\theta, \varphi, \omega, z) \, d\theta \, d\varphi - \frac{N(\varepsilon + Ed)}{kT} \quad \text{----(10)}$$

但し，

$$f(\theta, \varphi, w, z) = |we^{i\theta} + ze^{i\varphi} + 1|^2 \quad \text{----------(11)}$$

依って，零点は，

$$we^{i\theta} + ze^{i\varphi} + 1 = 0 \quad \text{----------(12)}$$

に与えられる。

さて，$w = u + iv$，$z = x + iy$ とおいて，(x, y, u, v)の四次元空間（複素外場，複素温度）で考えると，θ，φを固定した時，零点は，四次元空間の超平面になっている。θ，φを働かすと，零点集合は，四次元空間のsubspace をなしており，

(i) $y = 0$の三次元空間への射影 或いは切口が，普通に扱っているcomplex field planeでの零点分布であり，

(ii) $v = 0$の切口が，複素温度平面での零点分布$g_T(u, Z)$になる。

今のモデルでは，(12)から，わかるように，w-plane と z-plane は全く，対称的になっており，分布関数は，

$$g_E(w; z) = \frac{2}{8\pi^2} \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(u, v)} = g_E(\gamma = |w|; z)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - (1-z)^2}} \frac{1}{\sqrt{(z+1)^2 - \gamma^2}}, \quad \text{----------(13)}$$

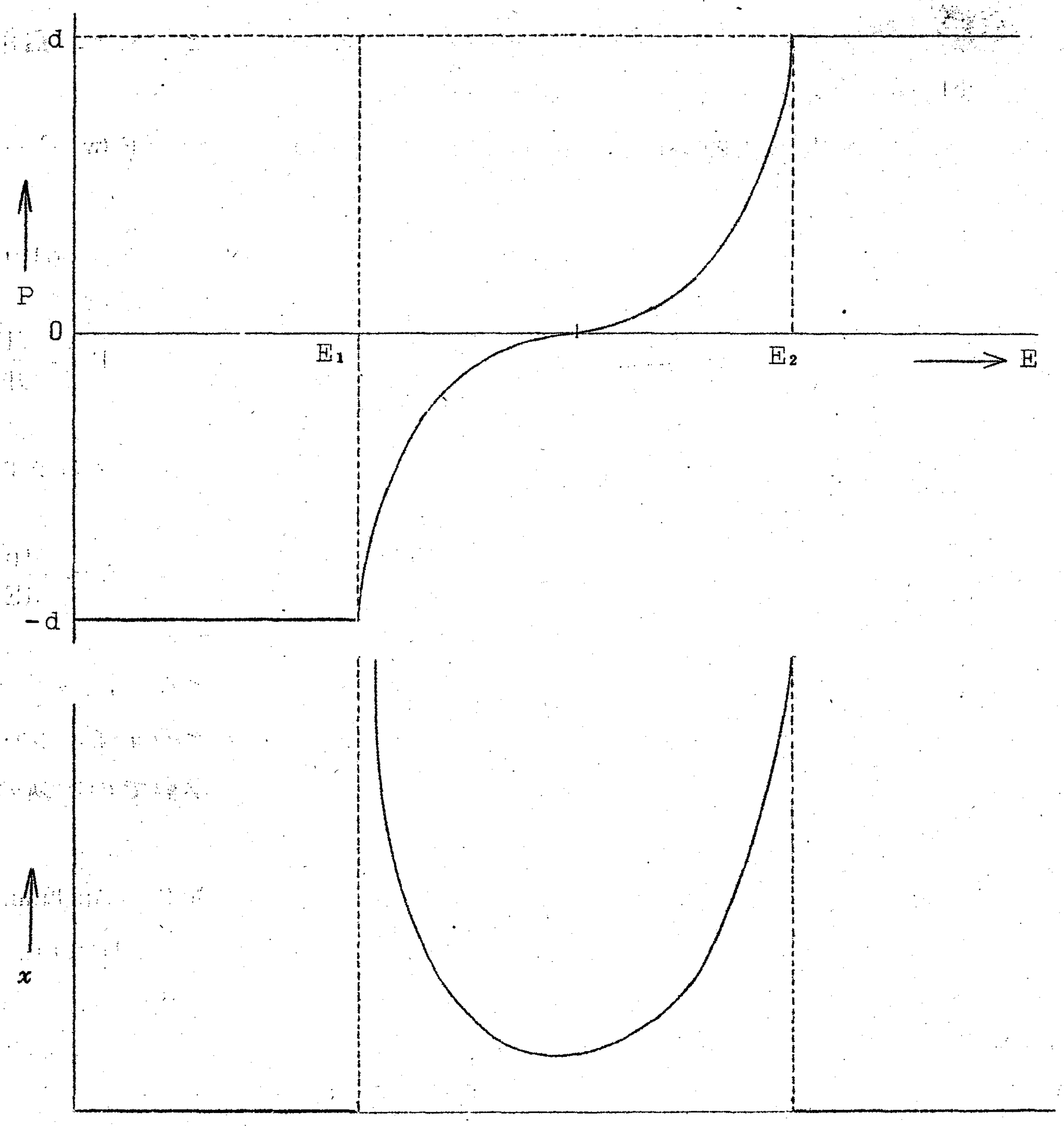
$$g_T(z; w) = g_E(z; w) \quad \text{----------(14)}$$

となる。これから，直ちに，polarizability の異常性は，比熱の異常性と全く同じになり，

$$
\begin{cases}
\chi_{o} \sim C_v \sim (T-T_c)^{-1/2} & \text{for } T > T_c, \\
\chi_{o} = C_v = 0 & \text{for } T < T_c
\end{cases}
\tag{15}
$$

となる。

注意すべきことは，(13)の分布関数は，二つの singular points を持っており，それに対応して，polarizability χ は，温度を T_c $(=\varepsilon/k\log 2)$ 以下に固定して，電場を強くして行くと，図のように二ケ所で発散する。即ち，転移点が二つ存在する。一つは，（－１，－１）方向への完全分極であり，もう一つは，電場の強さが，異方的な coupling energy に打ち勝って，(1, 1) 方向への完全分極を起す点になっている。



§ 3　Discussions

前節では，ＫＤＰモデルの解を利用して，一つの例について，複素温度・電場の空間での零点分布と比熱・分極率の異常性との関係を議論をしたのであるが，もっと一般の場合にも，四次元空間の零点分布の解析性によって，物理量の異常性か説明されると思われる。

References

1) M.Suzuki , Prog.Theor.Phys .38 (1967) 1243.

2) T.D.Lee and C.N.Yang , Phys , Rev.87 (1952), 410.

3) S.Katsura ,Phys.Rev. 127 (1962) 1508.

4) M.Suzuki , prog . Theor .Phys .38 (1967) 1225.

5) M.Suzuki and C . Kawabata , (to be published) .

6) F.Y.Wu , phys Rev.Letters 18 (1967) 605; and preprint .